Eötvös-inga mérések és a geoid: peremérték feladat és inverzió

Tóth Gyula

BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

Eötvös Loránd, a földtudós
MTA, 2019.05.15.

Tartalom

- Geoid
- Geodéziai peremérték-feladatok
- Eötvös geodéziai peremérték feladat
- Nehézségi erőtér inverziós meghatározása
- Eötvös-inga mérések inverziója
  - legkisebb négyzetes kollokációval
  - radiális bázisfüggvényekkel

Geoid

- Alapvető fizikai vonatkoztatási felület
  - vízszintes és függőleges irányok megadása
  - víz mozgása, építmények kivitelezése, ...

Geoid

- Alapvető fizikai vonatkoztatási felület
  - vízszintes és függőleges irányok megadása
  - víz mozgása, építmények kivitelezése, ...

„A tenger vizei, ha egyszer igazán és maradandólag megnyugodnának, felszinükön hű képét adnák ez alak nagyobb részének; folytatását azonban a szárazföldek területén csak sokkal elvontabb okoskodásokkal tudjuk képzeletünk elé állítani.”

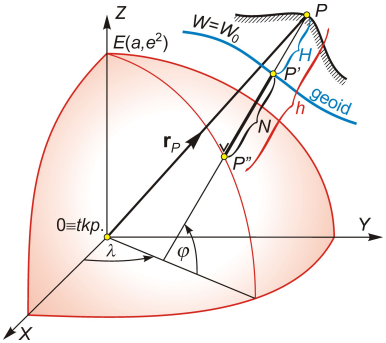
— Eötvös, 1901

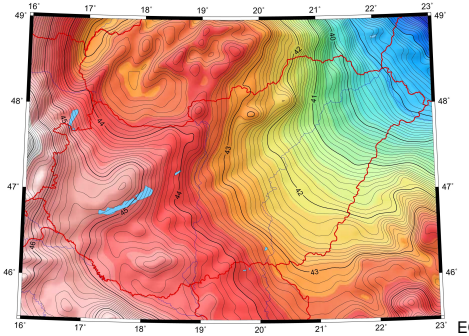
A Föld alakjának kérdése.

— Kivonat Br. Eötvös L. elnöki beszédéből, melylyel a M. Tud. Akadémia ünnepi közülését 1901. május 12-iken megnyitotta. —

Geoidmeghatározás

- Forgási ellipszoid vonatkoztatási felületéhez képest
  - N geoid-ellipszoid távolság
  - h: GNSS techikával, H szintezéssel

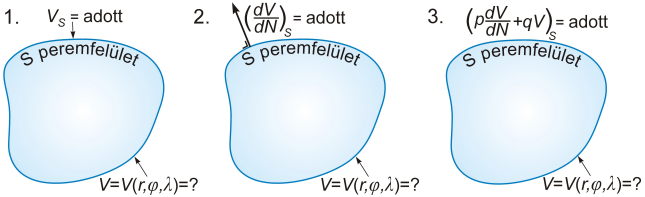




EGM2008

Geodéziai peremérték feladatok

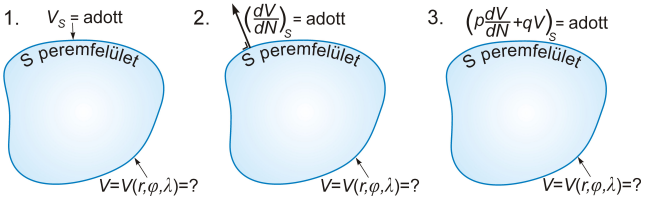
- Dirichlet, Neumann, Robin problémák



- G.G. Stokes (1849): Δg nehézségi rendellenességek ismertek a peremfelületen (*geoid*)

Geodéziai peremérték feladatok

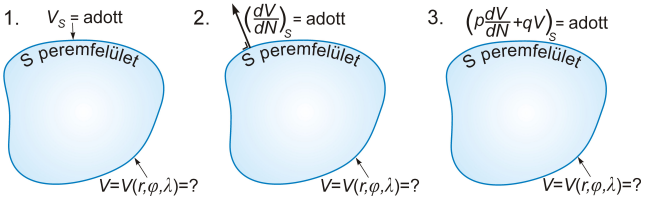
- Dirichlet, Neumann, Robin problémák



- G.G. Stokes (1849): Δg nehézségi rendellenességek ismertek a peremfelületen (*geoid*) ... de a mérések a *földfelszínen* vannak

Geodéziai peremérték feladatok

- Dirichlet, Neumann, Robin problémák



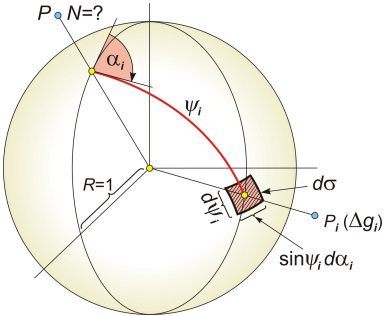
- G.G. Stokes (1849): Δg nehézségi rendellenességek ismertek a peremfelületen (*geoid*) ... de a mérések a *földfelszínen* vannak

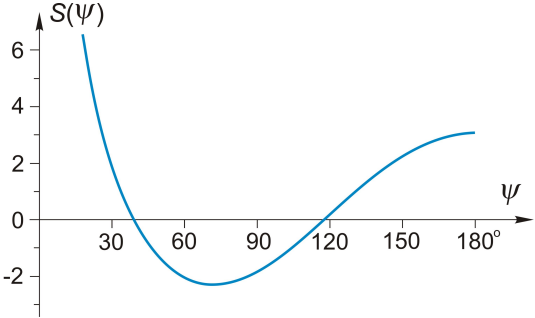
„Már az eddig mondottakból is fölismerhetjük a nehézségek egy részét, melyek a geoid alakjának meghatározásában fölmerülnek. Reá vonatkozó méréseinket nem magán a maghatározandó felületen, hanem rajta kívül, rendesen más magasságban, a szárazföldnek sokszor girbegörbe felületén kell végeznünk.”

— Eötvös, 1901

Stokes-integrál: geoid

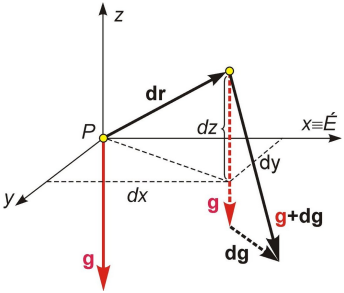
- $N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int\int_\sigma S(\psi_{PQ}) \Delta g(Q) d\sigma(Q)$
- $S(\psi)$ Stokes-függvény





Eötvös-inga mérések

- $\boldsymbol{g}$ nehézségi erő dg megváltozása kifejezhető az $\boldsymbol{E}$ Eötvös-tenzor segítségével (második potenciál deriváltak)
- $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} mérhető Eötvös-ingával

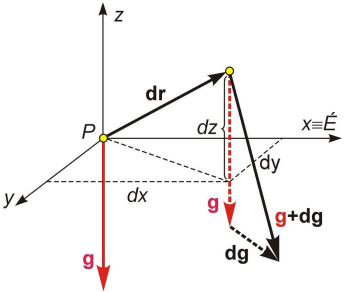


$$\underset{(3,1)}{\mathbf{dg}} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}}\mathbf{dr} = \underset{(3,3)}{\mathbf{E}}\ \underset{(3,1)}{\mathbf{dr}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}$$

Eötvös-inga mérések

- $\boldsymbol{g}$ nehézségi erő dg megváltozása kifejezhető az $\boldsymbol{E}$ Eötvös-tenzor segítségével (második potenciál deriváltak)
- $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} mérhető Eötvös-ingával



$$\underset{(3,1)}{\mathbf{dg}} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}}\mathbf{dr} = \underset{(3,3)}{\mathbf{E}}\,\underset{(3,1)}{\mathbf{dr}}$$

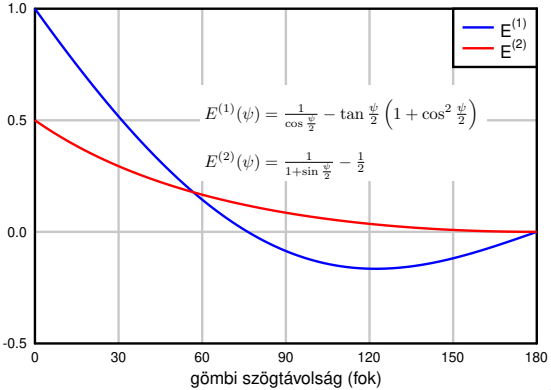
$$\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}$$

„ ... csak azt kivántam tőle, engedjen bepillantani annak az erőnek rejtvényeibe, mely e Földön mindent mozgat, mindennek kijelöli helyét.”

— Eötvös, 1901

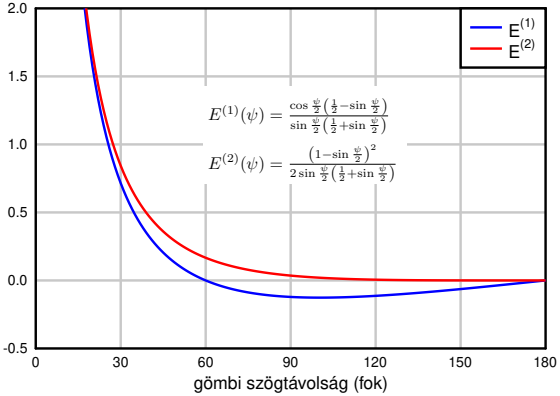
Eötvös peremérték feladat: geoid

- $N(P) = \frac{R^2}{4\pi\gamma} \int\int_\sigma E^{(1)}(\psi_{PQ})(W_{xz}\cos\alpha^* + W_{yz}\sin\alpha^*)(Q) + E^{(2)}(\psi_{PQ})(W_\Delta \cos 2\alpha^* + 2W_{xy}\sin 2\alpha^*)(Q)d\sigma(Q)$
- $E^{(1)}(\psi)$, $E^{(2)}(\psi)$ Eötvös függvények - geoid



Eötvös peremérték feladat: nehézségi rendellenességek

- $\Delta g(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int\int_\sigma E^{(1)}(\psi_{PQ})(W_{xz}\cos\alpha^* + W_{yz}\sin\alpha^*)(Q) + E^{(2)}(\psi_{PQ})(W_\Delta \cos 2\alpha^* + 2W_{xy}\sin 2\alpha^*)(Q)d\sigma(Q)$
- $E^{(1)}(\psi)$, $E^{(2)}(\psi)$ Eötvös függvények - nehézségi rendellenesség



Az inverziós módszerek alapgondolata

- A nehézségi erőtér $W(x)$ potenciálfüggvényét alkalmas $B(x, x_k)$ bázisfüggvények segítségével a következő alakban írhatjuk fel:

$$W(x) = \sum_k c_k B(x, x_k)$$

- a c_k-k egyelőre ismeretlen együtthatók, amelyeket inverzióval határozunk meg
- Az inverziós módszerek előnye: mindenfajta, nehézségi erőtérre vonatkozó mérés felhasználható, mert matematikai kapcsolatba hozhatók a W potenciálfüggvénnyel

Az inverziós együtthatók meghatározása

- Az i-vel jelölt mérési pontokban a $W(x_i)$ potenciál értékét és az x_k bázispontok helyzetét ismerve (túlhatározott) lineáris egyenletrendszert állíthatunk fel a c_k együtthatók kiszámítására (inverzió)
- Optimális becslést végzünk ($e(x_i)$ eltérések normája minimális):

$$W(x_i) + e(x_i) = \sum_k c_k B(x, x_k)$$

Eötvös-inga mérések bevonása az inverzióba

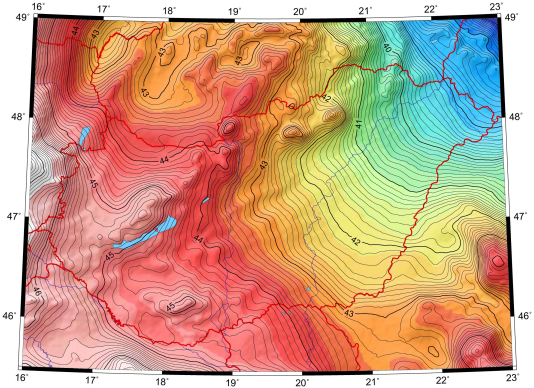
- Legkisebb négyzetes kollokáció
  - bázisfüggvények: kovariancia függvény
  - bázispontok: mérési pontok
- Gömbi radiális bázisfüggvények
  - bázisfüggvények: lokalizált harmonikus függvények ($P_n(t)$ Legendre polinomokkal)

$$B(r_i, r_k) = \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} (2n+1) \left(\frac{r_k}{r_i}\right)^{n+1} b_n P_n(\hat{r_i} \cdot \hat{r_k})$$

  - Shannon-bázisfüggvények: minden n-re $b_n = 1$
  - bázispontok: szabályos Reuter-rács pontjai

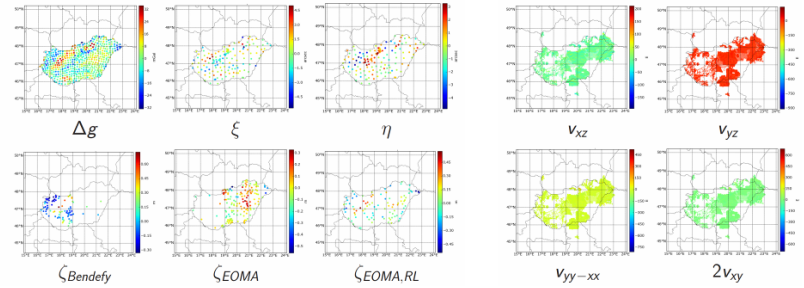
Geoid meghatározása Eötvös-inga mérésekkel

- legkisebb négyzetes kollokációval: HGTUB2007
- adatok: geopotenciális modell, terepmodell, nehézségi rendellenességek, GNSS/szintezési adatok, függővonal-elhajlások, Eötvös-inga W_{xz}, W_{yz} gradiensek



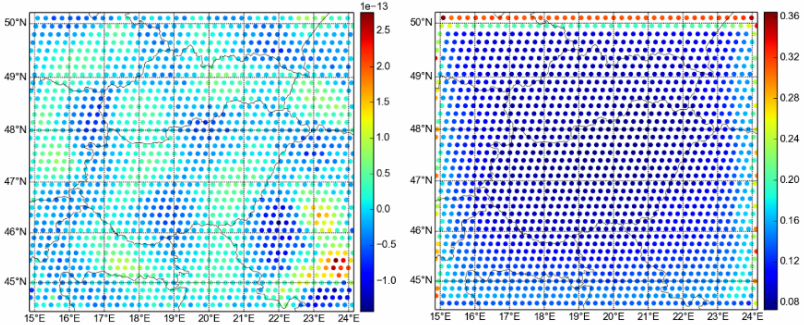
Geoid meghatározása Eötvös-inga mérésekkel

- gömbi radiális bázisfüggvényekkel
- adatok: geopotenciális modell, terepmodell, nehézségi rendellenességek, GNSS/szintezési adatok, függővonal-elhajlások, Eötvös-inga W_Δ, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} gradiensek (154 477 adat)



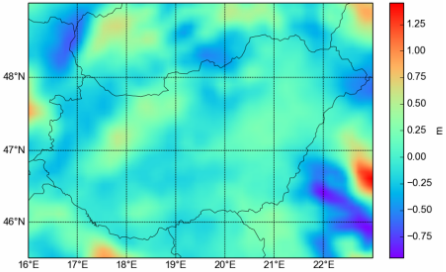
Geoid meghatározása Eötvös-inga mérésekkel

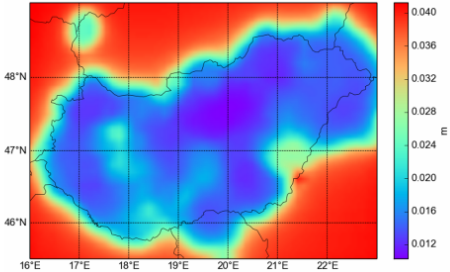
- inverziós együtthatók és relatív hibáik (1633 együttható)



Geoid meghatározása Eötvös-inga mérésekkel

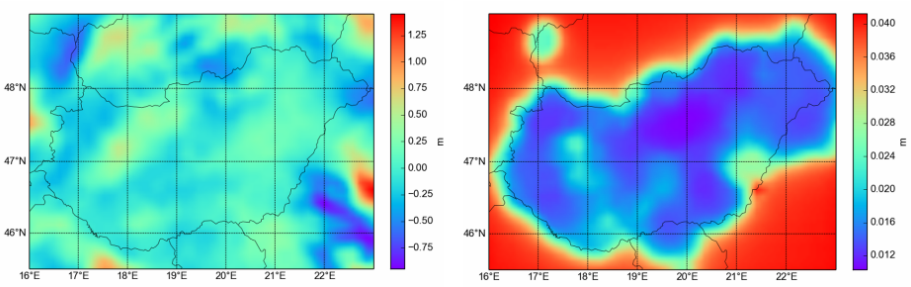
- reziduál kvázigeoid undulációk és szórásaik ($n = 200 - 1200$)





Geoid meghatározása Eötvös-inga mérésekkel

- reziduál kvázigeoid undulációk és szórásaik ($n = 200 - 1200$)



„A nehézségnek és a Föld alakjának ilyen finom és részletes vizsgálata egyszersmind mély betekintést enged azon tömegek elhelyezésébe, melyek ez erőre és ez alakra hatnak.”

— Eötvös, 1901