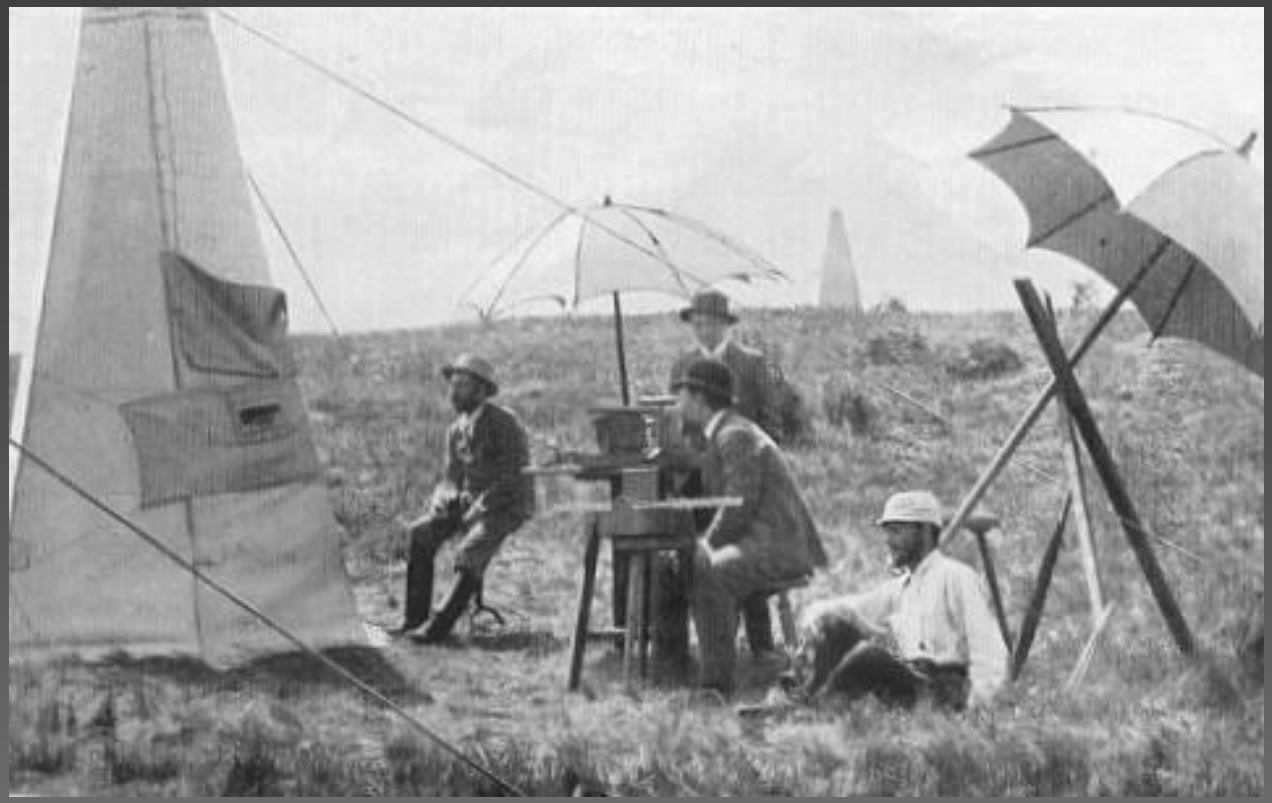
EÖTVÖS
www.eotvos100.hu

UNESCO
United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
Egyesült Nemzetek Nevelésügyi, Tudományos és Kulturális Szervezete

100th anniversary of Roland Eötvös (1848-1919), physicist, geophysicist, and innovator of higher education
Commemorated in association with UNESCO
Eötvös Loránd (1848-1919) fizikus, geofizikus és a felsőoktatás megújítójának 100. évfordulója
Az UNESCO-val közösen emlékezve



Dobróka Mihály

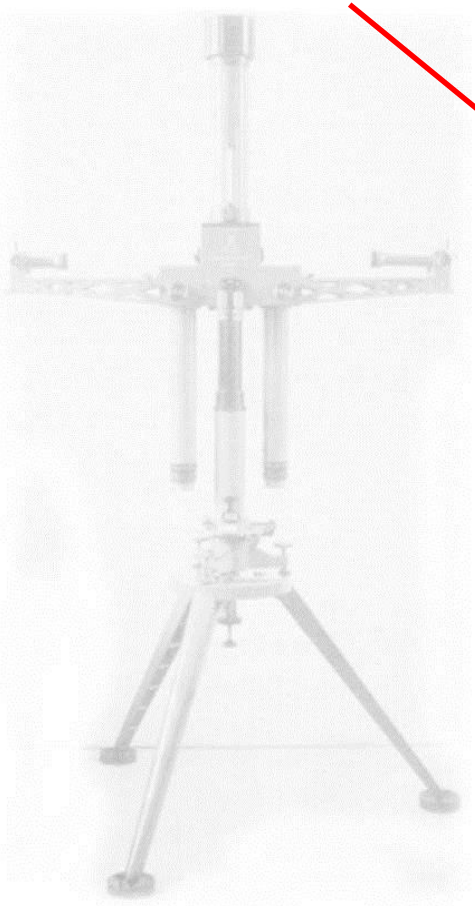
Völgyesi Lajos

A gravitációs potenciálfelület előállítása sorfejtéses inverzióval Eötvös-inga adatok alapján

Eötvös Loránd a földtudós

MTA, 2019. május 15.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}$$



- függővonal-elhajlás interpoláció görbületi adatok alapján

- <u>lokális geoidformák meghatározása</u>

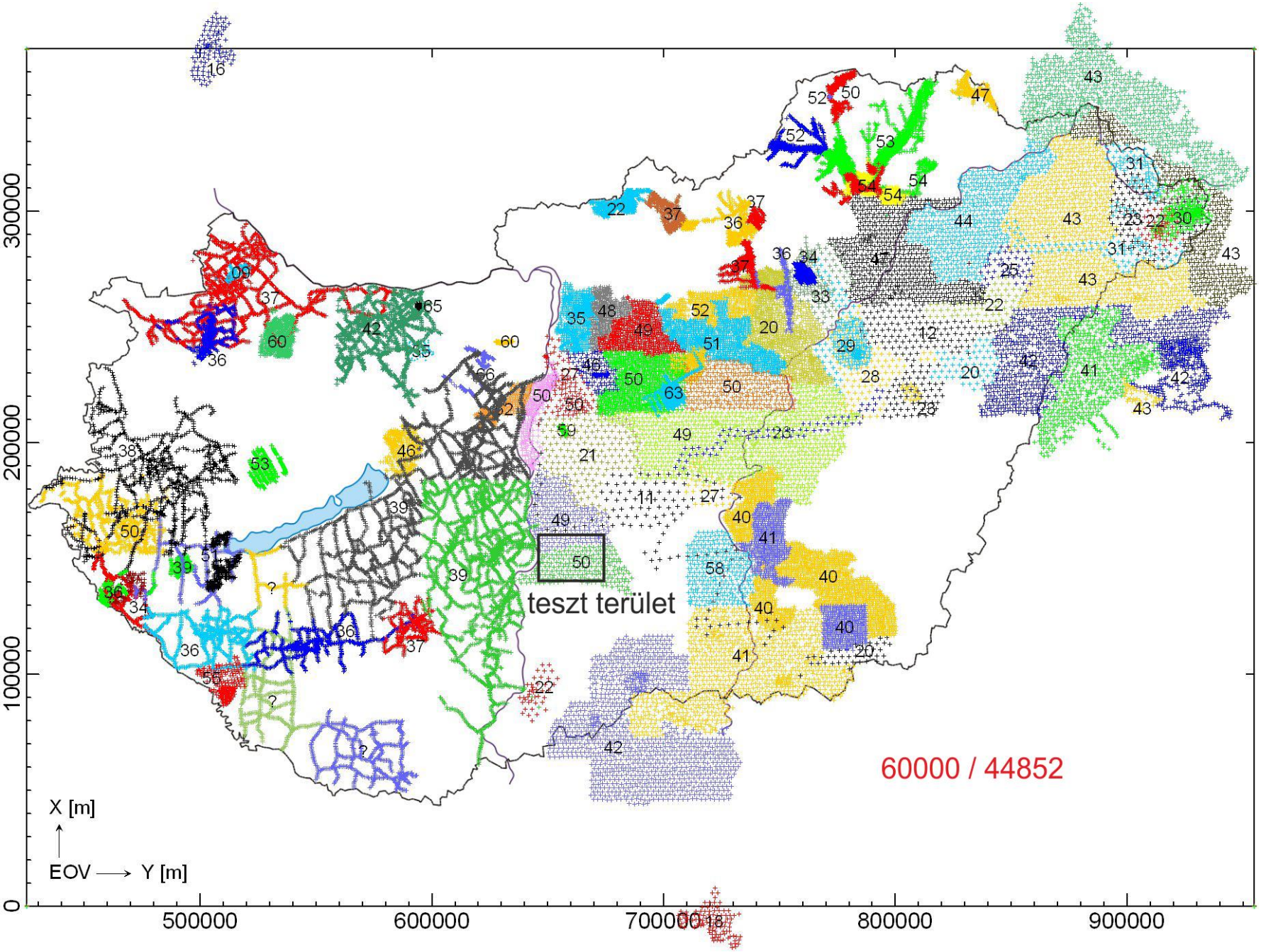
- a 2D potenciálfüggvény inverziós előállítása

- a nehézségi erőtér és a gravitá-ciós anomáliák meghatározása

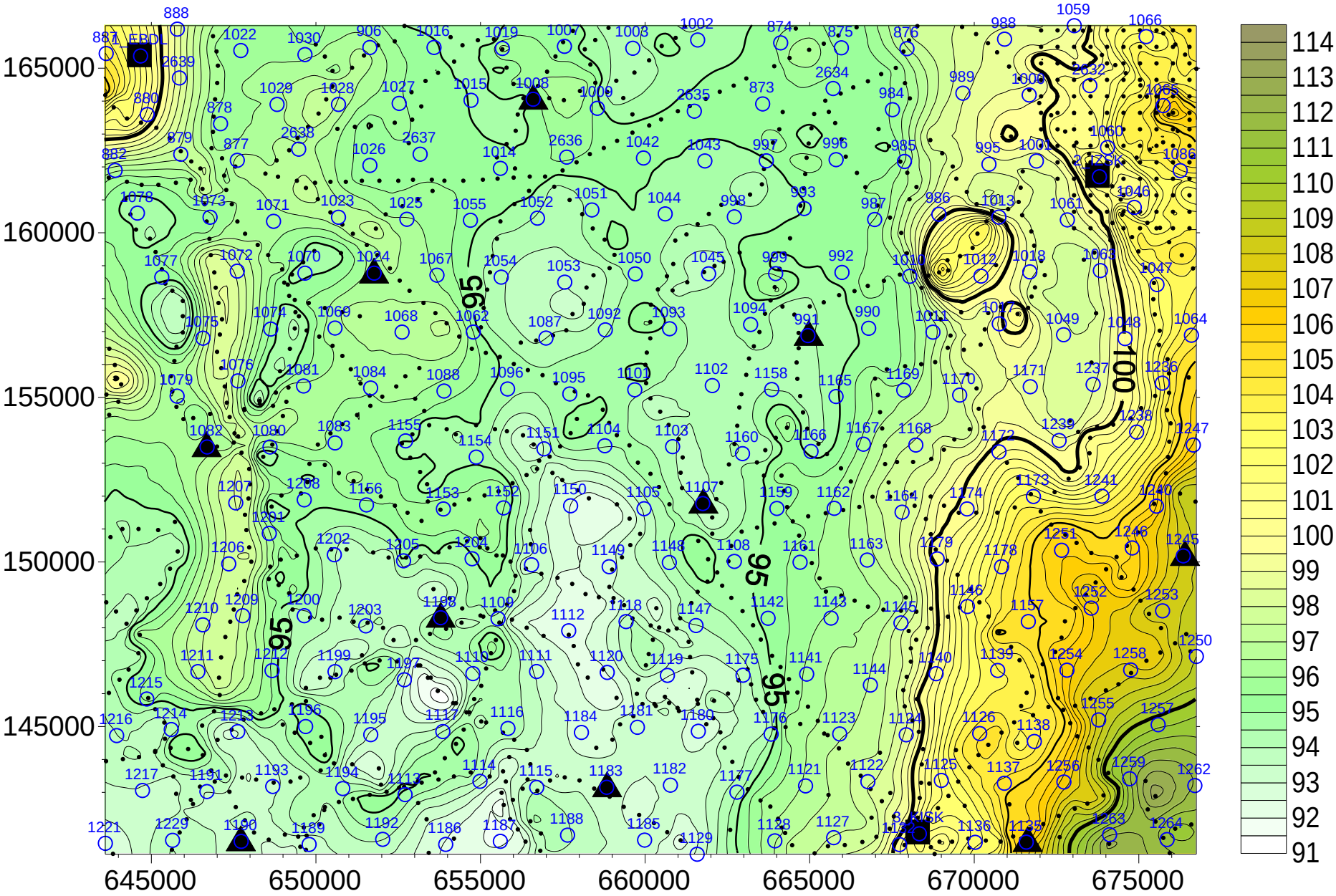
- vertikális gradiensek meghatározása

- új gradiométerek kalibrálása

- a 3D potenciálfüggvény inverziós előállítása



*Jelenleg **44852** ingamérés van számítógépes adatbázisban.*



Teszt terület

A 3D inverziós algoritmus

Vegyük fel a nehézségi erőtér *W(x,y,z)* pot. függvényét valamely $\Psi_1 .... \Psi_P$ (ismert) bázisfüggvény rendszer szerinti sorfejtés alakjában:

$$W(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x) \Psi_j(y) \Psi_k(z)$$

(ahol $l = i + (j-1) * N_y + (k-1) * N_x * N_y$ és B_l a sorfejtés ismeretlen együtthatói)

*A **második deriváltak** az Eötvös-inga mérésekből:*

$$\left.\begin{aligned}
W_{xy} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \underbrace{\Psi_i'(x) \Psi_j'(y) \Psi_k(z)}_{S_{ql}} \\
W_\Delta &= W_{yy} - W_{xx} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \underbrace{\left\{ \Psi_j''(y) \Psi_i(x) - \Psi_j(y) \Psi_i''(x) \right\} \Psi_k(z)}_{Q_{ql}} \\
W_{xz} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \underbrace{\Psi_i'(x) \Psi_j(y) \Psi_k'(z)}_{D_{ql}} \\
W_{yz} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} B_l \underbrace{\Psi_i(x) \Psi_j'(y) \Psi_k'(z)}_{F_{ql}}
\end{aligned}\right\}$$

Kiszámolható mátrixelemek a <u>*q*-ik mérési pontban</u>:

$$S_{ql} = \Psi_i^{'}(x_q)\Psi_j^{'}(y_q)\Psi_k(z_q)$$

$$Q_{ql} = \left\{\Psi_j^{''}(y_q)\Psi_i(x_q) - \Psi_j(y_q)\Psi_i^{''}(x_q)\right\}\Psi_k(z_q)$$

$$D_{ql} = \Psi_i^{'}(x_q)\Psi_j(y_q)\Psi_k^{'}(z_q)$$

$$F_{ql} = \Psi_j^{'}(y_q)\Psi_i(x_q)\Psi_k^{'}(z_q)$$

amelyekkel a számított Eötvös-inga adatok:

$$\left.\begin{aligned} W_{xy}^{(q)} &= \sum_{l=1}^{M} B_l S_{ql} \\ W_{\Delta}^{(q)} &= \sum_{l=1}^{M} B_l Q_{ql} \\ W_{xz}^{(q)} &= \sum_{l=1}^{M} B_l D_{ql} \\ W_{yz}^{(q)} &= \sum_{l=1}^{M} B_l F_{ql} \end{aligned}\right\}$$

ahol $M = N_x N_y N_z - 1$ a sorfejtési együtthatók száma, $S_{ql}, Q_{ql}, D_{ql}, F_{ql}$ ismertek.

*Az **első deriváltak** a graviméteres mérésekből és a függővonal-elhajlásokból:*

$$\left.\begin{aligned} W_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x)\Psi_j(y)\Psi_k^{'}(z) \\ W_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i^{'}(x)\Psi_j(y)\Psi_k(z) \\ W_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} B_l \Psi_i(x)\Psi_j^{'}(y)\Psi_k(z) \end{aligned}\right\}$$

Kiszámolható mátrixelemek a *q*-ik mérési pontban:

$$A_{ql} = \Psi_i(x_q)\Psi_j(y_q)\Psi_k^{'}(z_q)$$

$$C_{ql} = \Psi_i^{'}(x_q)\Psi_j(y_q)\Psi_k(z_q)$$

$$H_{ql} = \Psi_i(x_q)\Psi_j^{'}(y_q)\Psi_k(z_q)$$

amelyekkel a számított Eötvös-inga adatok:

$$\left.\begin{aligned} W_z^{(q)} &= \sum_{l=1}^{M} B_l A_{ql} \\ W_x^{(q)} &= \sum_{l=1}^{M} B_l C_{ql} \\ W_y^{(q)} &= \sum_{l=1}^{M} B_l H_{ql} \end{aligned}\right\}$$

ahol $M = N_x N_y N_z - 1$ a sorfejtési együtthatók száma, A_{ql}, C_{ql}, H_{ql} ismertek.

Az eltérés vektor elemei:

$$\left.\begin{aligned}
e_q^{(1)} &= W_{xy_{mért}}^{(q)} - \sum_{l=1}^{M} B_l S_{ql} \\
e_q^{(2)} &= W_{\Delta_{mért}}^{(q)} - \sum_{l=1}^{M} B_l Q_{ql} \\
e_q^{(3)} &= W_{xz_{mért}}^{(q)} - \sum_{l=1}^{M} B_l D_{ql} \\
e_q^{(4)} &= W_{yz_{mért}}^{(q)} - \sum_{l=1}^{M} B_l F_{ql}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
e_q^{(5)} &= W_{z_{mért}}^{(q)} - \sum_{l=1}^{M} B_l A_{ql} \\
e_q^{(6)} &= W_{x_{mért}}^{(q)} - \sum_{l=1}^{M} B_l C_{ql} \\
e_q^{(7)} &= W_{y_{mért}}^{(q)} - \sum_{l=1}^{M} B_l H_{ql}
\end{aligned}\right\}$$

A minimalizálandó függvény:

$$E = \sum_{s=1}^{7} \sum_{k=1}^{N_s} (e_k^{(s)})^2$$

N_s az s-ik típusú adatok száma

A mért adatok vektora:

$$\vec{d}^{(mért)} = \left\{ W_{xy}^{(1)},...,W_{xy}^{(N_1)},W_{\Delta}^{(1)},...,W_{\Delta}^{N_2},W_{xz}^{(1)},...,W_{xz}^{(N_3)},...,...,W_{y}^{(1)},...,W_{y}^{(N_7)},\right\}$$

A Jacobi (együttható) mátrix szerkezete:

$$G_{qj} = \begin{cases} S_{qj} & q \le N_1 \\ .... & \\ & \\ .... & \\ H_{qj} & \sum_{s=1}^{6} N_s < q \le \sum_{s=1}^{7} N_s \end{cases}$$

A mért és a számított értékek eltérése:

$$\vec{e} = \vec{d}^{(mért)} - \underline{\underline{G}}\vec{B}$$

és legyen:

$$E = (\vec{e},\vec{e}) = \sum_{k=1}^{N} e_k^2$$

ahol: $N = \sum_{s=1}^{7} N_s$

A Laplace-egyenlet bevonása a számításba:

$$\Delta W = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 0$$

$$^{comp.}\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} B_l \underbrace{\left\{ \Psi_i''(x)\Psi_j(y)\Psi_k(z) + \Psi_i(x)\Psi_j''(y)\Psi_k(z) + \Psi_i(x)\Psi_j(y)\Psi''_k(z) \right\}}_{L_l}$$

<u>*a q-adik mérési pontban:*</u>

$$L_{ql} = \Psi_i''(x_q)\Psi_j(y_q)\Psi_k(z_q) + \Psi_i(x_q)\Psi_j''(y_q)\Psi_k(z_q) + \Psi_i(x_q)\Psi_j(y_q)\Psi''_k(z_q)$$

$$^{comp.}\Delta W^{(q)} = \sum_{l=1}^{M} B_l L_{ql}$$

<u>*a mért és a számított adatok vektora:*</u>

$$^{meas}\mathbf{d} = \left\{ W_{zx}^{(1)},\ldots,W_{zx}^{(N_1)}, W_{zy}^{(1)},\ldots,W_{zy}^{(N_2)}, \ldots, W_z^{(1)},\ldots,W_z^{(N_7)}, 0^{(1)},\ldots,0^{(N_8)} \right\}$$

$$^{comp.}\mathbf{d} = \left\{ {}^{comp.}W_{zx}^{(1)},\ldots,{}^{comp.}W_{zx}^{(N_1)}, \ldots, {}^{comp.}W_z^{(1)},\ldots,{}^{comp.}W_z^{(N_7)}, {}^{comp.}\Delta W^{(1)},\ldots,{}^{comp.}\Delta W^{(N_8)} \right\}$$

<u>*a kibővített Jakobi-mátrix:*</u>

$$G_{qj} = \begin{cases} S_{qj} & q \le N_1 \\ \vdots & \\ H_{qj} & \sum_{s=1}^{6} N_s < q \le \sum_{s=1}^{7} N_s \\ L_{qj} & \sum_{s=1}^{7} N_s < q \le \sum_{s=1}^{8} N_s \end{cases}$$

A $\frac{\partial E}{\partial B_l} = 0 \qquad (l = 1,\ldots,M)$ alapján

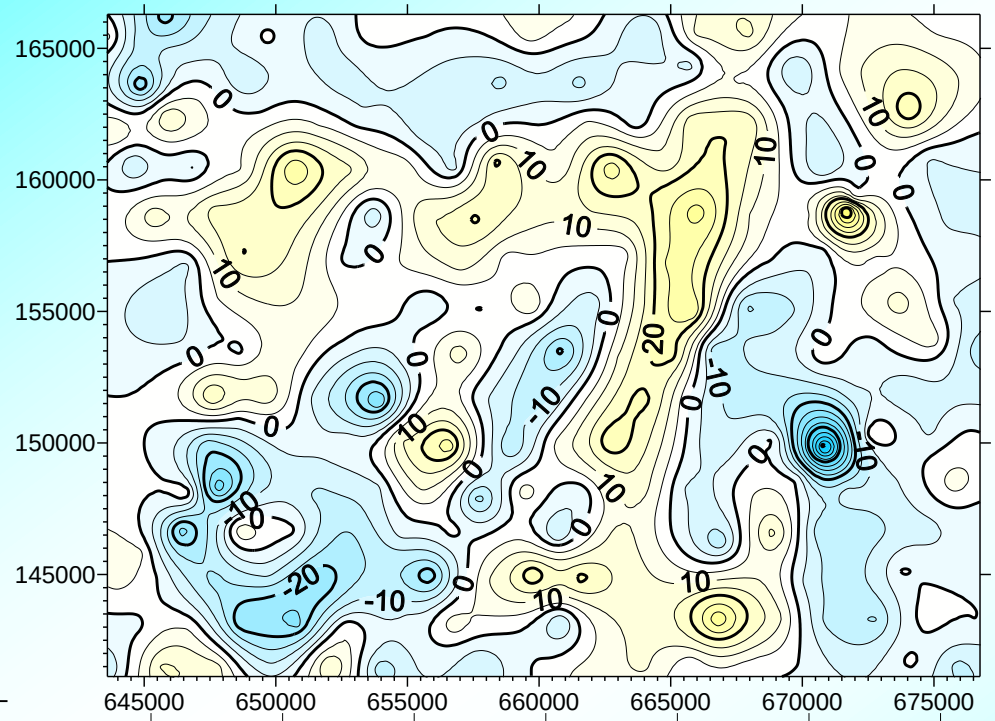
az inverz probléma: $\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \vec{B} = \underline{\underline{G}}^T \vec{d}^{\,(mért)}$

amelyből: $\boxed{\vec{B} = \left(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}\right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \vec{d}}$

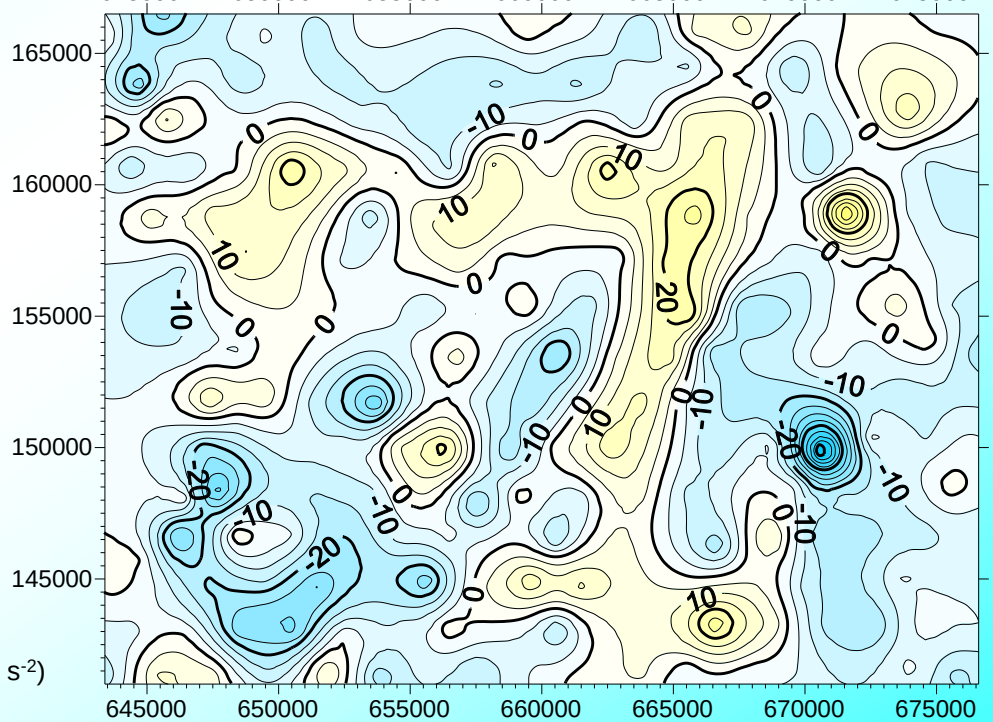
Az inverz probléma lineáris, a $\vec{B}$ ismeretében az ***<u>Eötvös-tenzor valamennyi eleme</u>*** egyértelműen számítható a mérési terület minden pontjában (nemcsak a mérési helyeken).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}$$

mért W_Δ

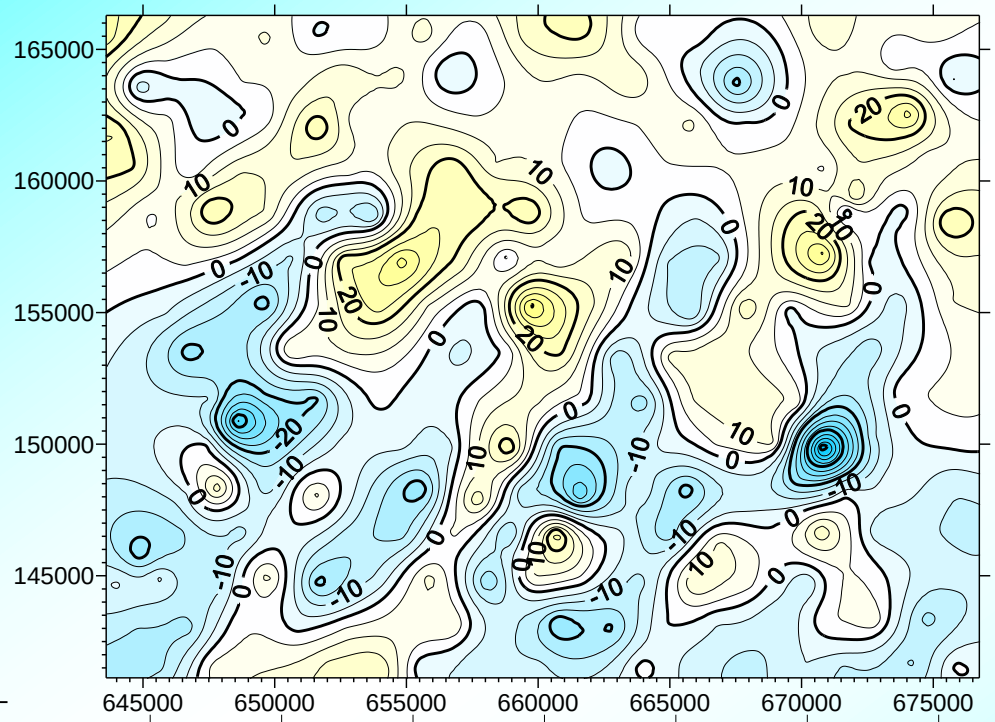


számított W_Δ

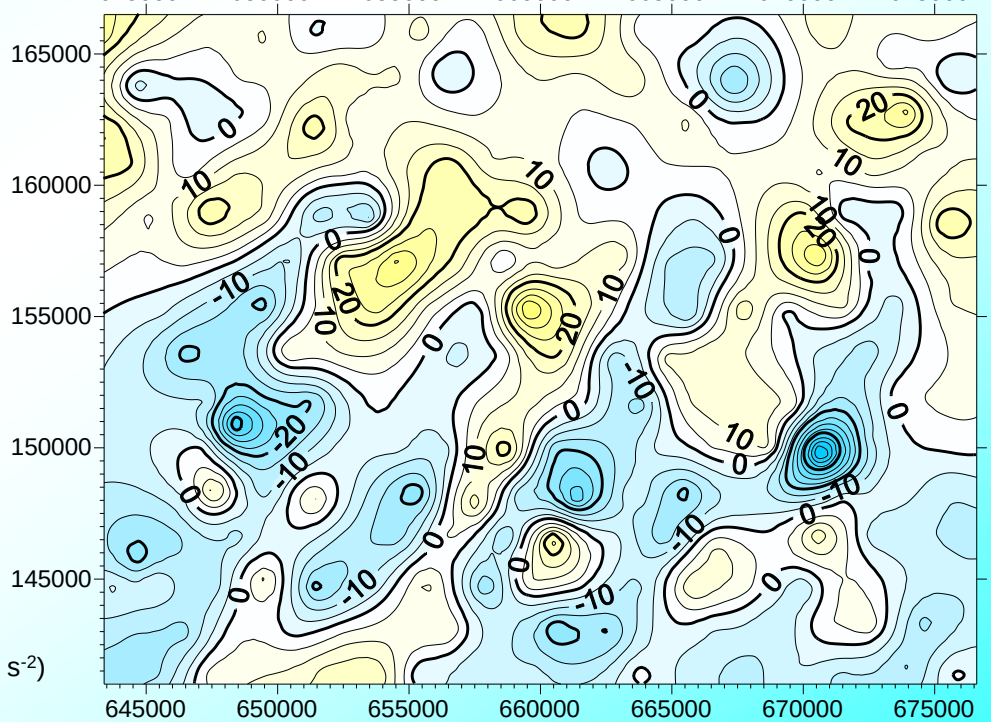


Izovonal lépésköz: 5 E.
(1E = 1Eötvös Egység = 10^{-9} s^{-2})

mért W_{xy}



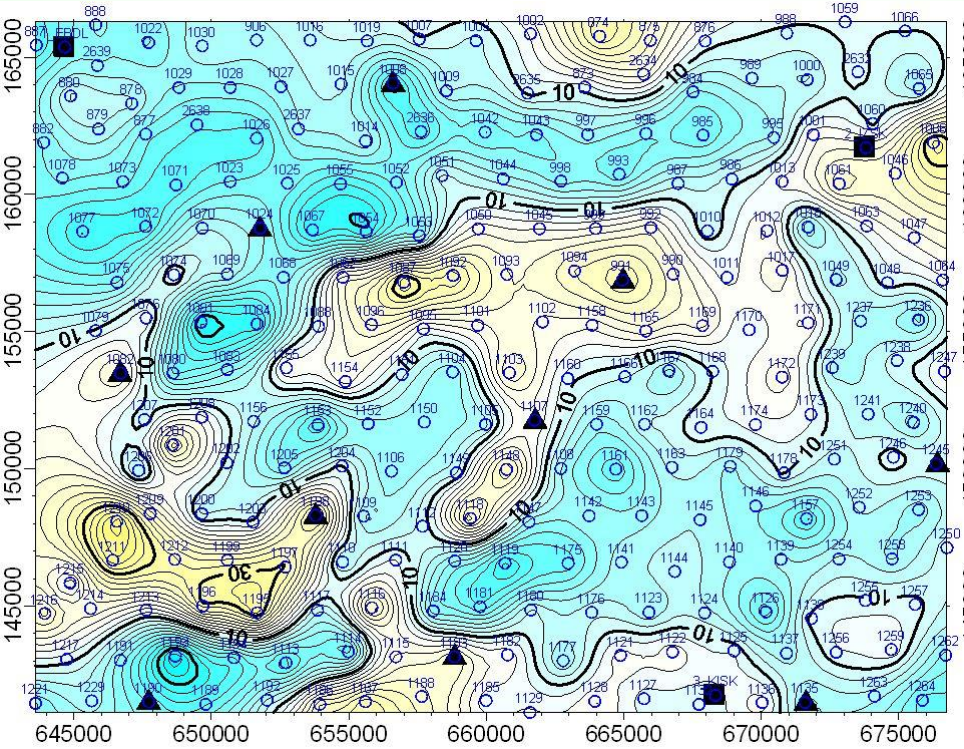
számított W_{xy}

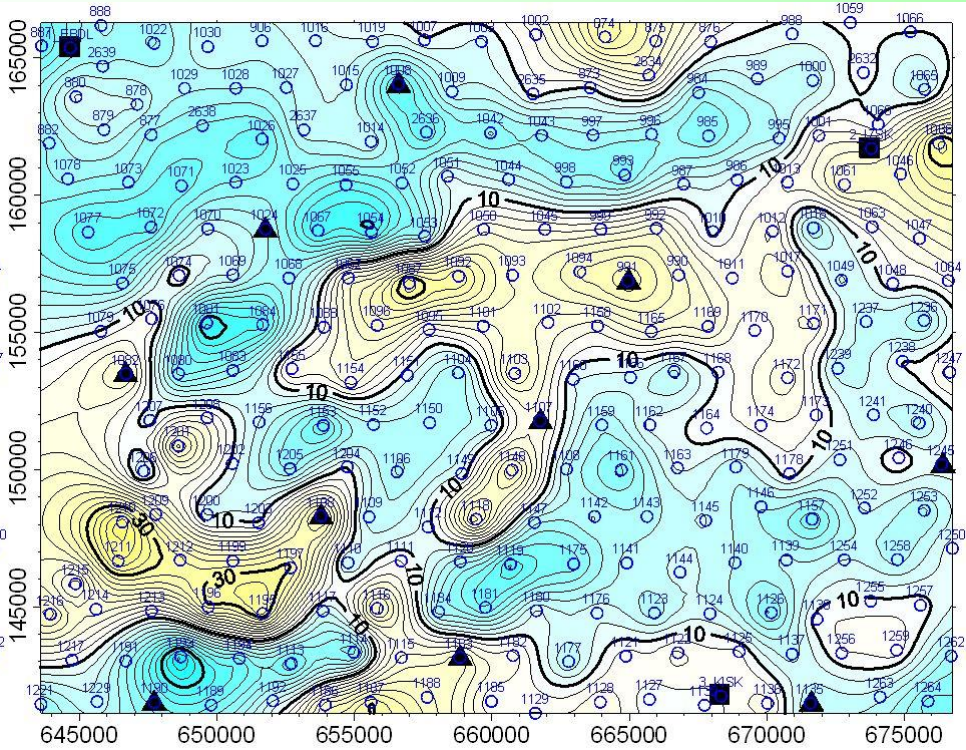


Izovonal lépésköz: 5 E.
(1E = 1Eötvös Egység = 10^{-9} s^{-2})

mért W_{zx}

számított W_{zx}

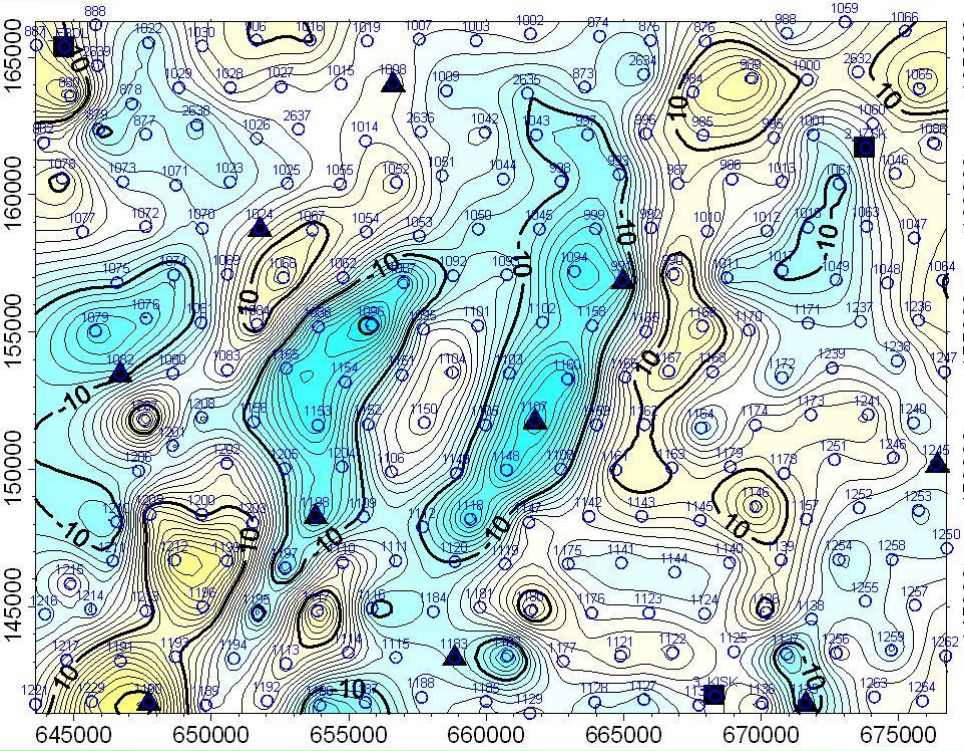


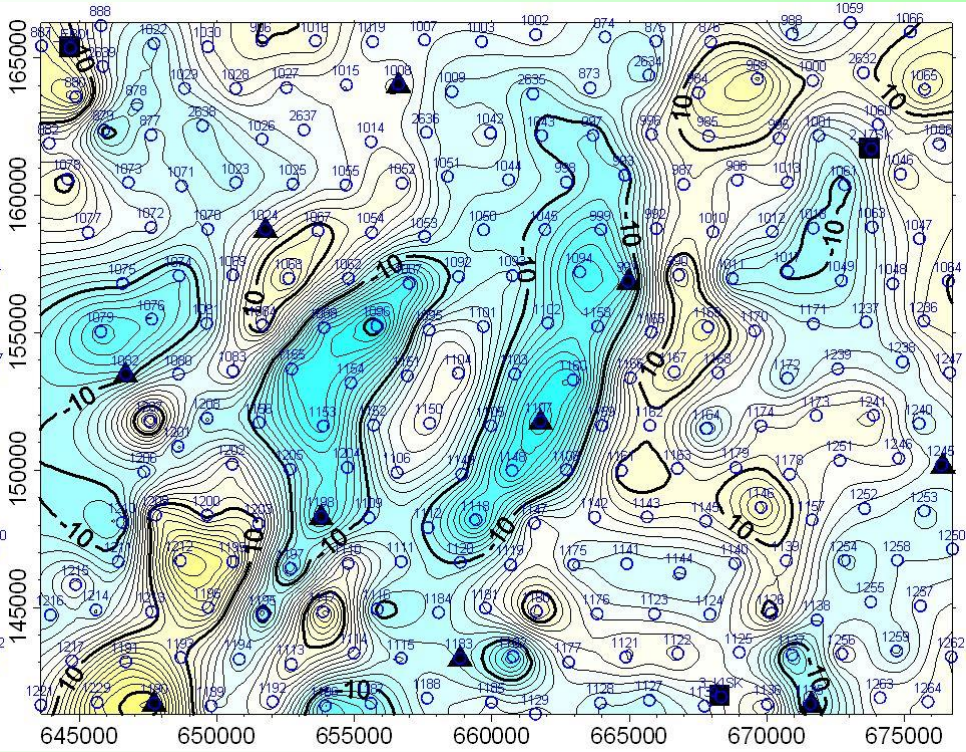


Izovonal lépésköz: 5 E.
(1E = 1Eötvös Egység = 10^{-9} s^{-2})

mért W_{zy}

számított W_{zy}

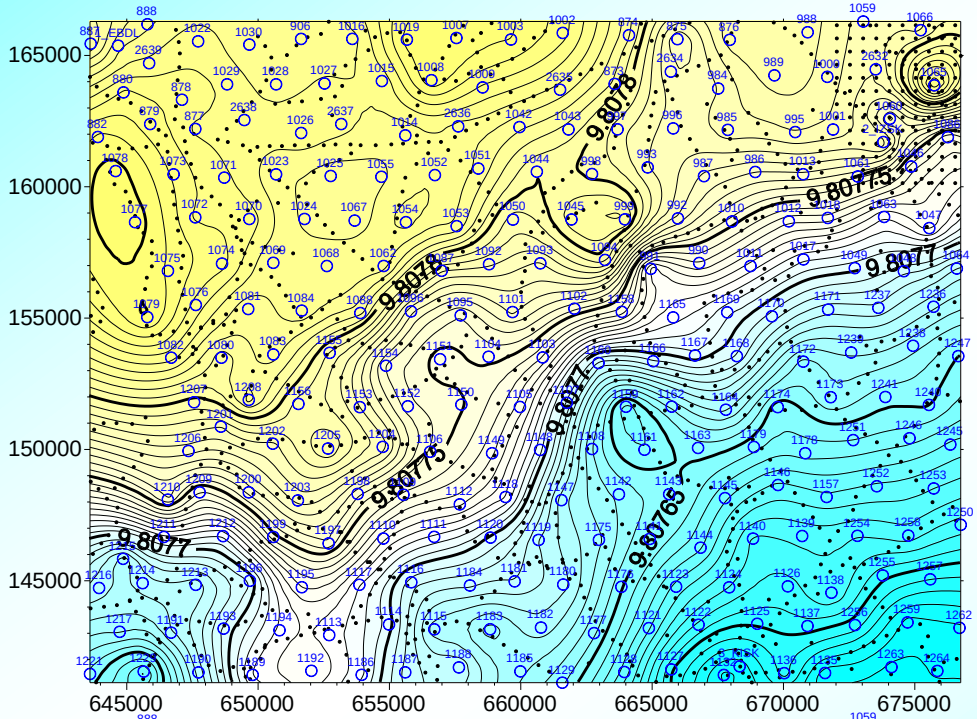




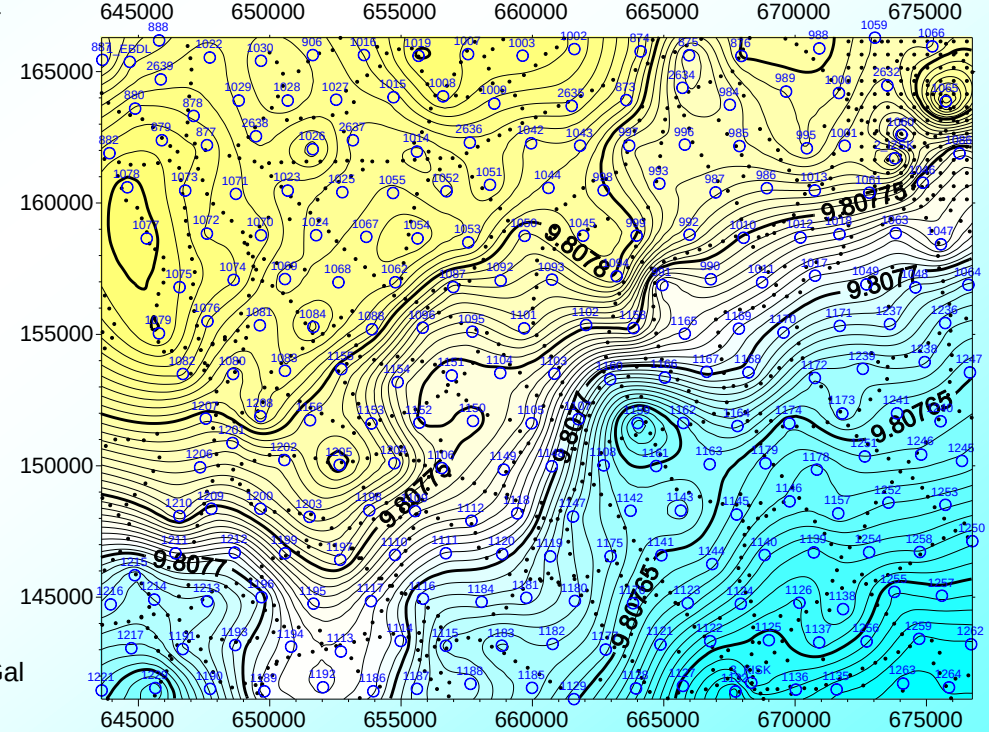
Izovonal lépésköz: 5 E.

(1E = 1Eötvös Egység = 10^{-9} s^{-2})

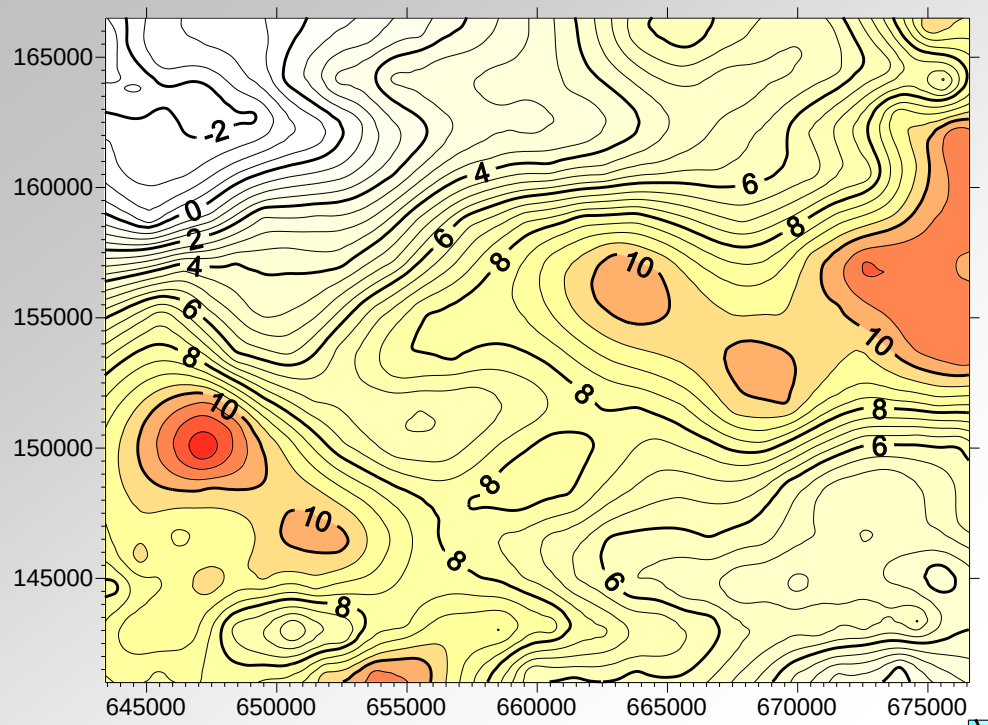
mért W_z (g)



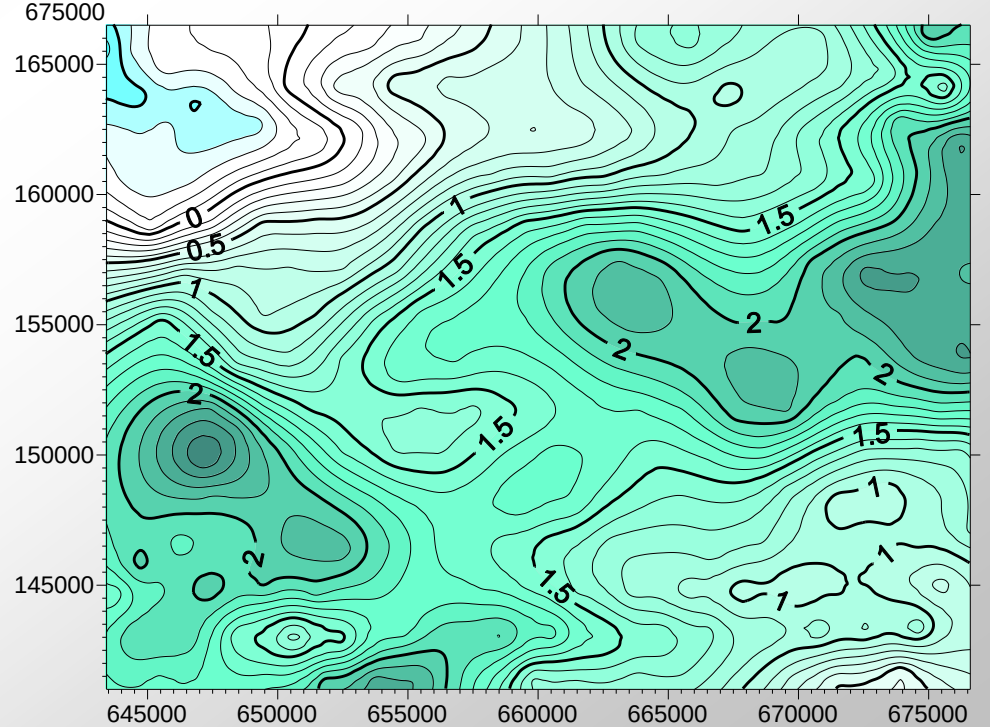
számított W_z (g)



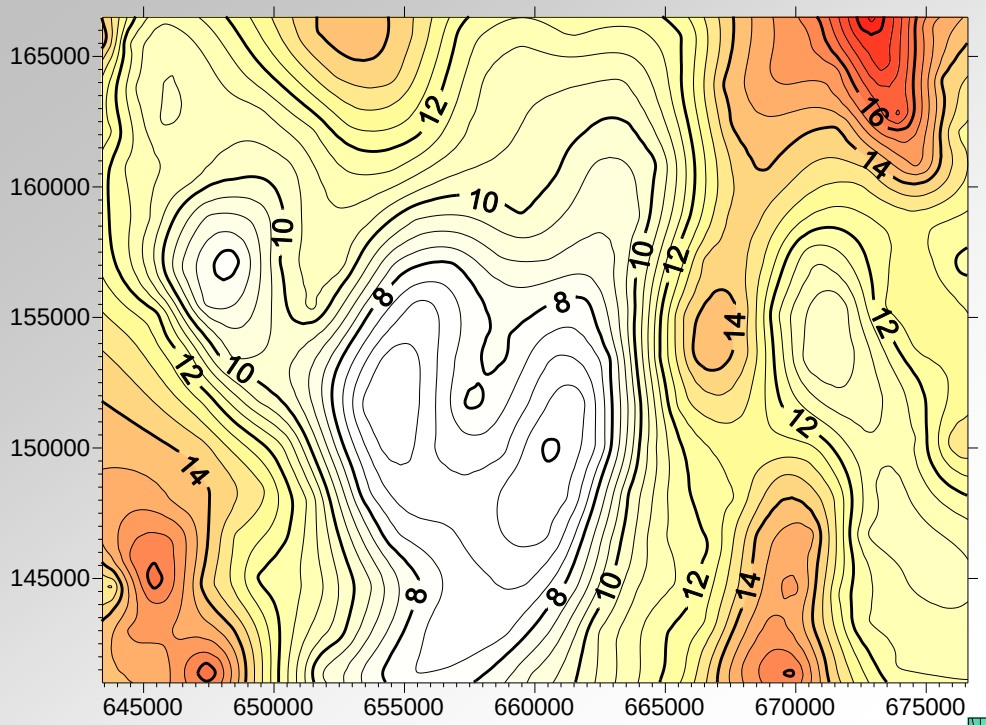
Izovonal lépésköz: 0.01 mGal



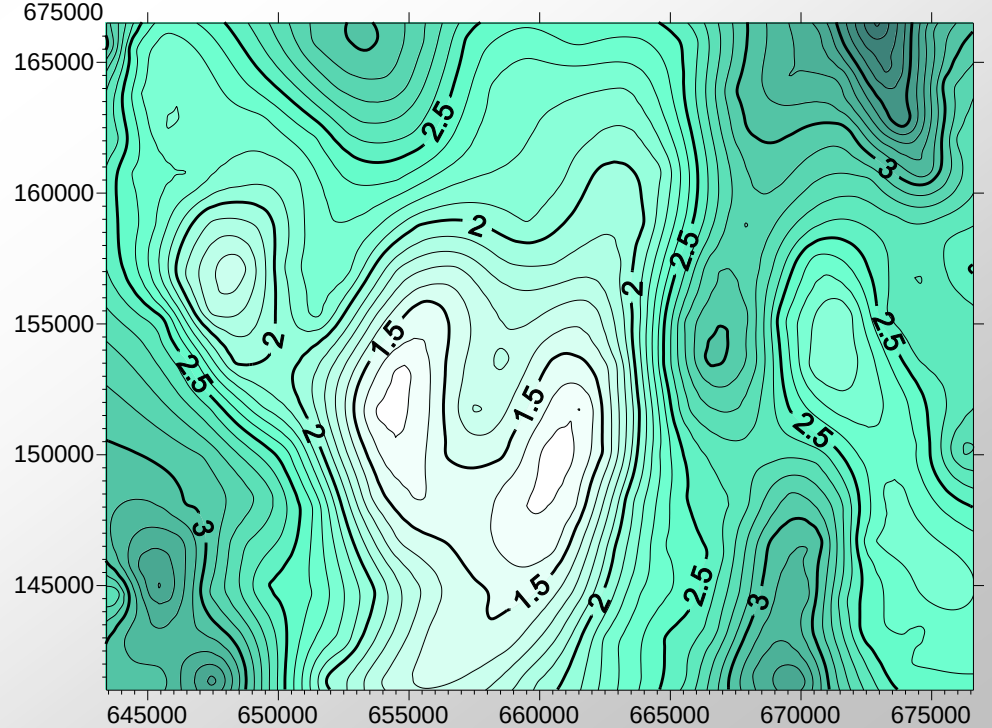
Inverzióval előállított W_x (g_x) értékek
(izovonal lépésköz 0.5 mGal)



függővonal-elhajlás ξ összetevője
(izovonal lépésköz 0.1“)

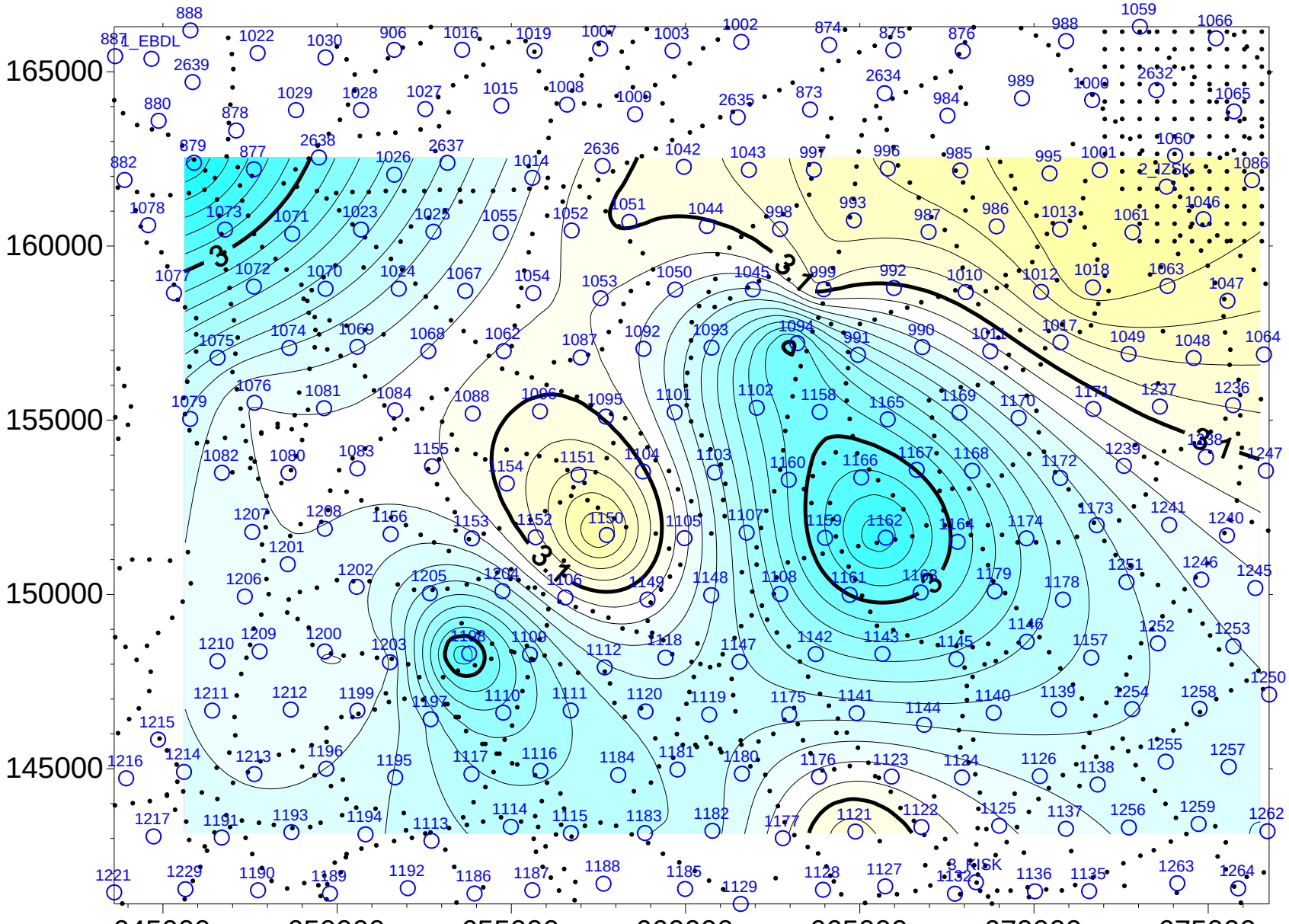


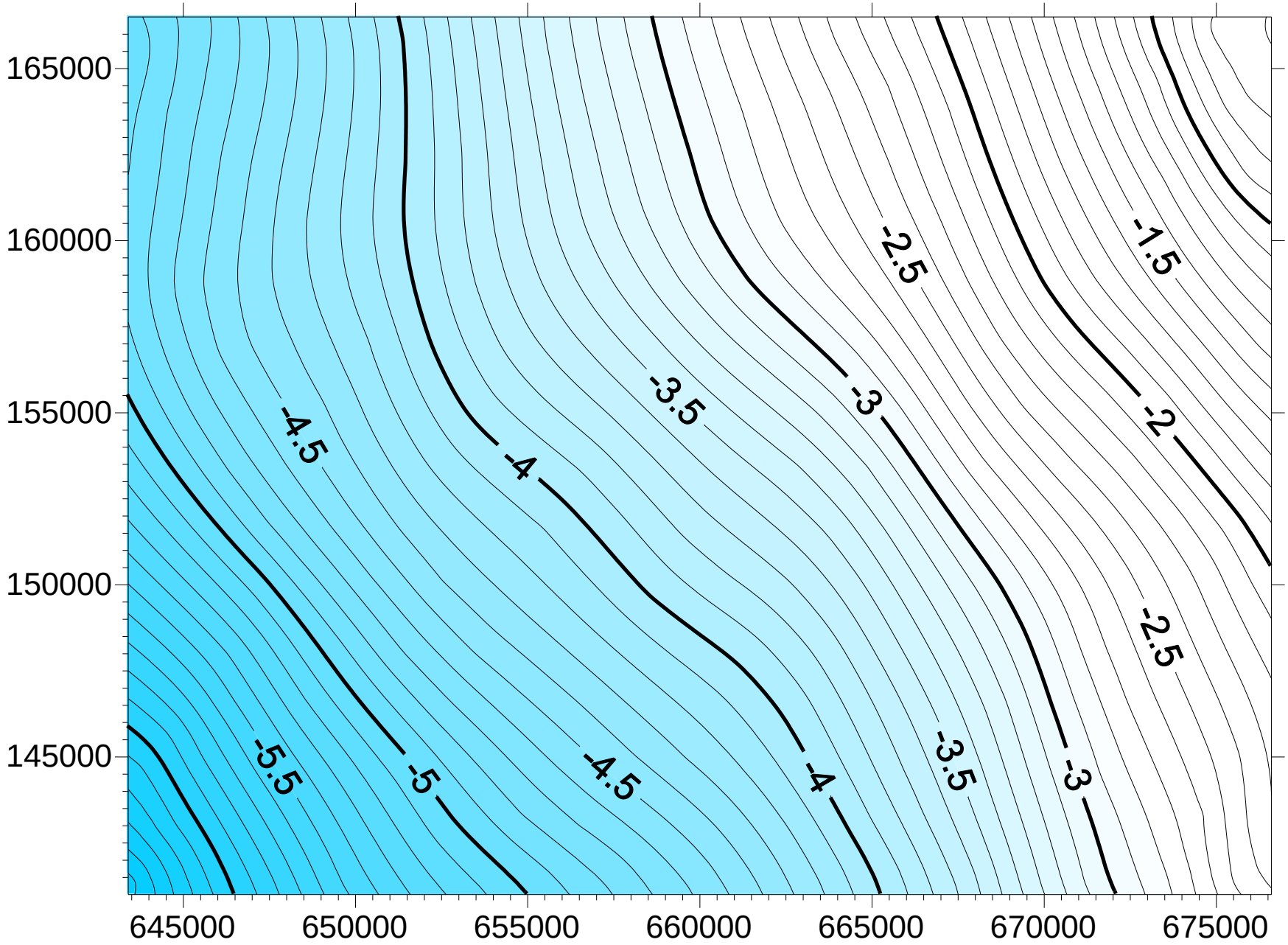
Inverzióval előállított W_y (g_y) értékek
(izovonal lépésköz 0.5 mGal)



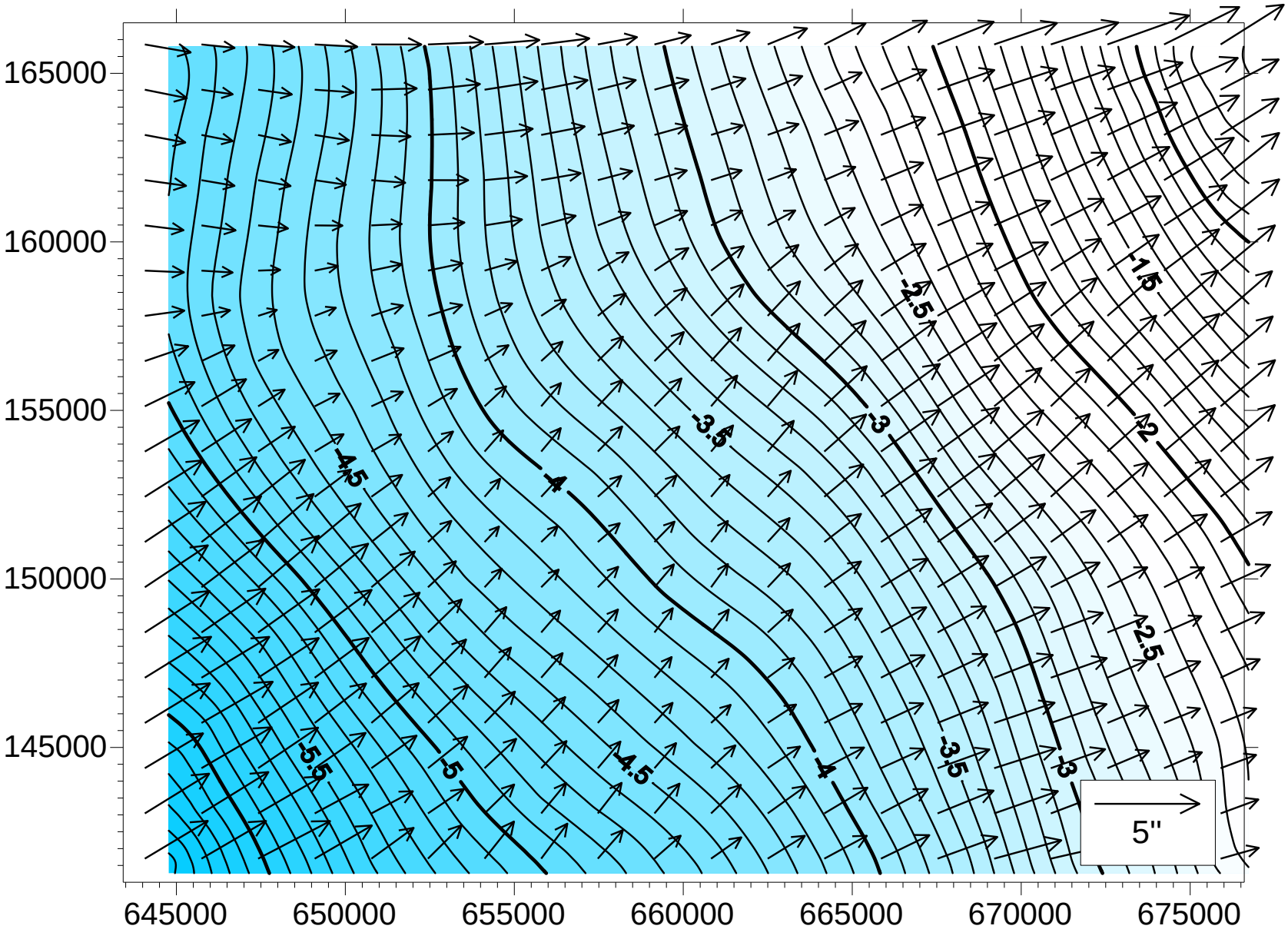
függővonal-elhajlás η összetevője
(izovonal lépésköz 0.1“)

Az inverzióval előállított W_{zz} vertikális gradiens, izovonal lépésköz: 10 E

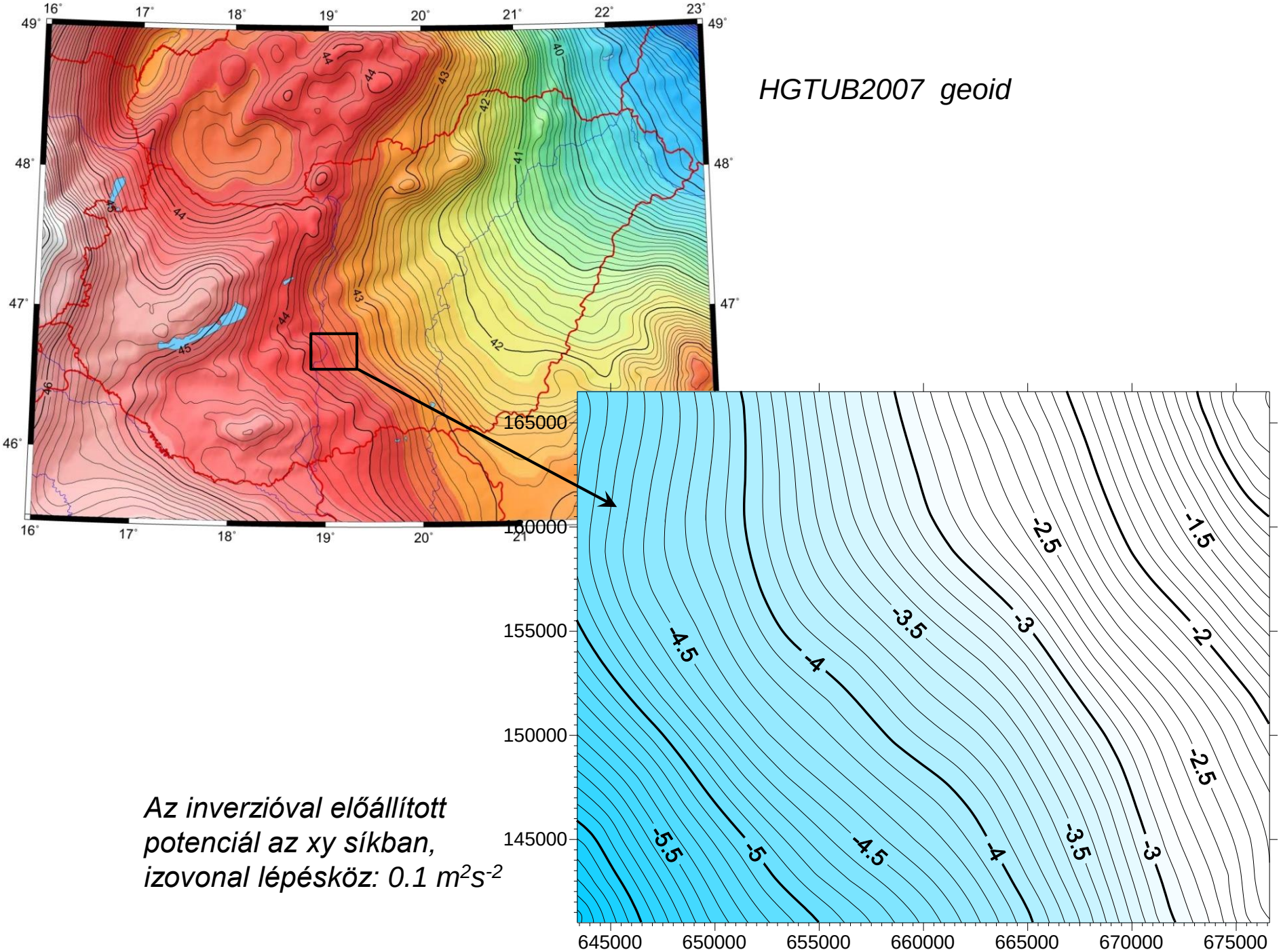




Az inverzióval előállított potenciál az xy síkban, izovonal lépésköz: 0.1 m^2s^{-2}



Az inverzióval előállított potenciál és a függővonal-elhajlások vektorábrája



Az inverzióval előállított potenciál az xy síkban, izovonal lépésköz: 0.1 m^2s^{-2}